Mécanique classique | Chapitre 4 | TD (M4)

Exercice n°1 • Travail d'une force de frottement fluide *cours*

Un point matériel est animé d'un mouvement sinusoïdal unidimensionnel d'amplitude x_0 et de pulsation ω. Il subit l'action d'une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\,\overrightarrow{v}$. Déterminer le travail de $\overrightarrow{f}$ au cours d'une période.

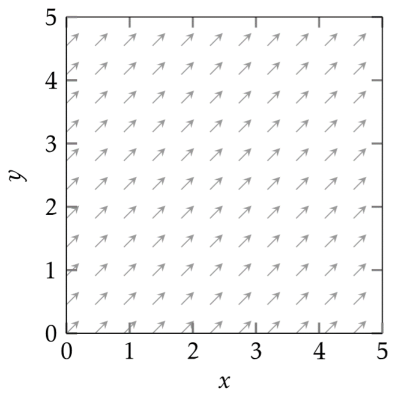
Exercice n°2 • Forces conservatives et non-conservatives *cours*

On s'intéresse dans cet exercice à différents champs de force réalisés dans un plan. Les forces sont caractérisées par leurs composantes cartésiennes donnant la force en un point (x, y) du plan (avec F_0 et k des constantes).

$$\overrightarrow{F}_0 = F_0\,(\overrightarrow{u}_x + \overrightarrow{u}_y) \qquad \overrightarrow{F}_1 = k\,x\,\overrightarrow{u}_x$$

$$\overrightarrow{F}_2 = k\,y\,\overrightarrow{u}_x \qquad \overrightarrow{F}_3 = -k\,(x\,\overrightarrow{u}_x + y\,\overrightarrow{u}_y)$$

1) Pour chaque champ de force étudié on établira un schéma représentant qualitativement le vecteur $\overrightarrow{F}$ en fonction de la position du type de celui représenté ci-dessous pour le champ de force $\overrightarrow{F}_0$.



2) Montrer que $\overrightarrow{F}_1$ dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,1}(x)$ dont on donnera l'expression vérifiant $\mathcal{E}_{p,1}(0) = 0$.

3) Le travail de $\overrightarrow{F}_1$ entre deux point M_1 et M_2 dépend-il du chemin emprunter ? Le calculer.

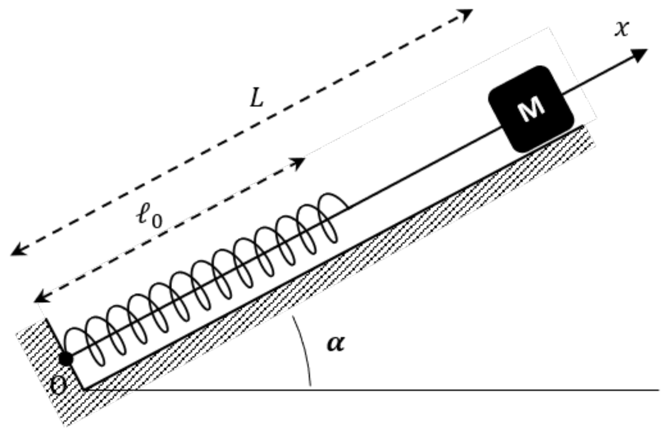
4) La force $\overrightarrow{F}_2$ est-elle conservative ? Pour le démontrer, exhiber une courbe fermée simple sur laquelle le travail de $\overrightarrow{F}_2$ n'est pas nulle.

5) Montrer que $\overrightarrow{F}_3$ est conservative et déterminer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,3}(x, y)$ dont dérive la force.

6) Exprimer $\mathcal{E}_{p,3}(r, \theta)$ en coordonnées polaires. Que retrouve-t-on ?

Exercice n°3 • Amortisseur *cours*

On considère un ressort sans masse (k, ℓ_0) sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. Le ressort est fixé à l'une de ses extrémité et est libre à l'autre extrémité. Une masse m ponctuelle est lancée d'une distance $L > \ell_0$ de l'origine avec une vitesse nulle. Elle se déplace sans frottement et on note $x(t)$ sa position au cours du temps.



1) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ et de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,el}$. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p(x)$ de la masse. On distinguera les cas où $x > \ell_0$ et $0 < x < \ell_0$.

2) Déterminer la position d'équilibre x_{eq}.

3) Tracer l'allure de $\mathcal{E}_p(x)$. On distinguera 3 cas :

- cas [1] où $\mathcal{E}_p(0) > \mathcal{E}_p(L)$;
- cas [2] où $\mathcal{E}_p(0) < \mathcal{E}_p(L)$ et $x_{eq} > 0$;
- cas [3] où $\mathcal{E}_p(0) < \mathcal{E}_p(L)$ et $x_{eq} < 0$;

4) Décrire qualitativement l'allure de la trajectoire dans les trois cas précédents et préciser graphiquement où se trouve la position d'équilibre.

Dans la suite, on se place dans le cas n°1.

5) Déterminer l'équation permettant de déterminer v_{max}, la vitesse maximale de la masse au cours du mouvement. On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

6) Déterminer l'équation permettant de déterminer ℓ_{min}, la longueur minimale du ressort au cours du mouvement. On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

Exercice n°4 • Freinage ★☆☆

Une voiture de masse m qui roule dans la direction $\overrightarrow{u_x}$ subit, tant qu'elle est en mouvement, une force de frottement solide donnée par : $\overrightarrow{f} = -\mu mg\,\overrightarrow{u_x}$, avec μ une constante qui dépend de l'état de la route et des pneus.

Données :

- $m = 1,2$ tonne ;
- $g = 9,81$ m·s^{-2} ;
- $\mu = 0,4$ sur route sèche et $\mu = 0,3$ sur route humide.

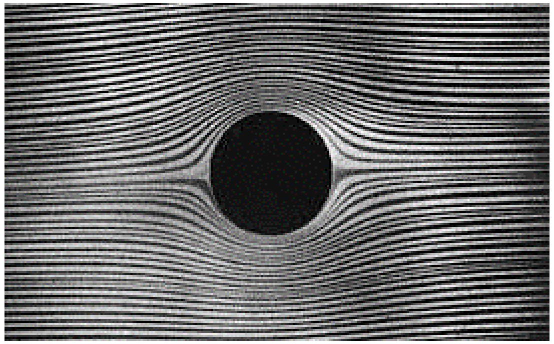
1) Déterminer la puissance que doit fournir le moteur à la voiture afin de maintenir une vitesse constante $v_0 = 130$ km·h^{-1} sur route sèche.

2) On coupe le moteur. Déterminer la distance d'arrêt d.

3) À quelle vitesse v_1 aurait-il fallu rouler pour avoir la même distance d'arrêt sur route humide ?

Exercice n°5 • Opérateur gradient ★☆☆

On souhaite décrire l'écoulement d'un fluide visqueux (le miel par exemple) autour d'un cylindre de rayon R. Loin de la perturbation causée par le cylindre, la vitesse du fluide vaut : $\overrightarrow{v} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$.



On se place dans un repère polaire d'origine le centre du cylindre. Les équations de mécanique de fluide donnent les résultats suivants :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \quad \text{avec :} \quad \phi = v_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos(\theta)$$

On donne l'expression du gradient en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

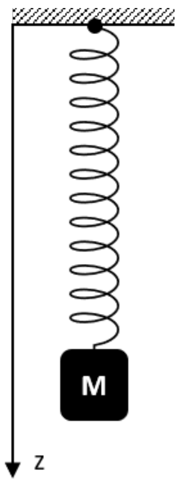
1) Déterminer l'expression de $\overrightarrow{v}$ dans la base polaire.

2) En déduire l'expression de $\overrightarrow{v}$ dans la base cartésienne lorsque $r \gg R$. Est-ce cohérent ?

3) Déterminer l'expression de $\overrightarrow{v}$ lorsque $r = R$. Justifier ce résultat.

Exercice n°6 • Ressort vertical ★⯪☆

On considère une masse m accrochée à l'extrémité d'un ressort sans masse, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est fixe.



1) Déterminer l'énergie potentielle de la masse.

2) En déduire la position d'équilibre de la masse z_{eq}.

On lâche le ressort en $z_i = z_{eq} + z_0$ (avec $z_0 > 0$) et avec une vitesse nulle.

3) À l'aide d'un théorème énergétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$, l'altitude du ressort. La résoudre.

Exercice n°7 • Saut à l'élastique en toute sécurité ★⯪☆

Un homme, de masse $m = 70$ kg saute à l'élastique d'un pont haut de 180 m surplombant les gorges du Verdon. Un élastique exerce la même force de rappel qu'un ressort. Pour un matériau donné et une longueur à vide ℓ_0, la constante de raideur k de l'élastique vaut :

$$k = \frac{k_0}{\ell_0} \quad \text{avec :} \quad k_0 = 2 \text{ kN}$$

On néglige les frottements de l'air. Pour un saut en toute sécurité, il faut que la personne qui saut ne s'approche pas à moins de 20 m du sol.

En appliquant un théorème énergétique judicieusement choisi, déterminer la longueur à vide maximale ℓ_m de l'élastique à vide pour un saut en toute sécurité.

On pourra poser :

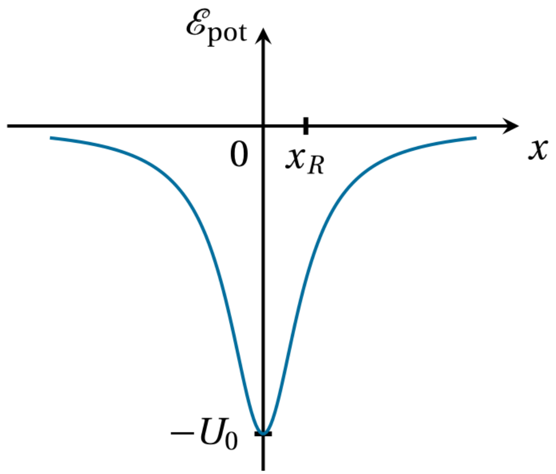
$$\lambda = 1 + \frac{mg}{k_0}$$

Exercice n°8 • Puits de potentiel ★★☆

On étudie, dans un vide poussé, le mouvement unidimensionnel selon un axe (Ox) d'un atome de lithium (Li), modélisé par un point matériel de masse m. Un faisceau laser focalisé au point O (origine du repère) exerce sur l'atome une force conservative qui dérive ce l'énergie potentielle suivante :

$$\mathcal{E}_p(x) = -\frac{U_0}{1+\varepsilon^2} \quad \text{avec :} \quad \varepsilon = \frac{x}{x_R}$$

Où U_0 et x_R des constantes positives. La fonction $\mathcal{E}_p(x)$ est représentée ci-dessous.



Données :

- Masse d'un atome de lithium : $m = 1,17 \cdot 10^{-26}$ kg
- Longueur caractéristique du puits : $x_R = 3,0 \cdot 10^{-4}$ m
- La profondeur U_0 est donnée en unité de température : $U_0 = k_B T_0$ avec : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K^{-1} la constante de Boltzmann et $T_0 = 200\ \mu$K

Pour les questions 1 à 3, l'axe (Ox) est horizontal. On admet pour l'instant que le poids de l'atome est compensé par une autre dispositif, qui sera étudier à partir de la question 4.

On considère l'atome initialement immobile en $x = 0$ au fond du puits de potentiel. On lui communique à l'instant $t = 0$ une vitesse v_0 positive selon $\overrightarrow{u_x}$.

1) À quelle condition portant sur v_0 l'atome demeure-t-il dans un état lié ?

2) S'il est mis dans un état de diffusion, déterminer l'expression de sa vitesse limite, notée v_∞, quand x tend vers l'infini.

3) On suppose que $v_0^2 \ll 2U_0/m$. Montrer, à l'aide d'un développement limité de $\mathcal{E}_p$ pour $\varepsilon \ll 1$, que le mouvement de l'atome est harmonique. On donnera l'expression de sa pulsation,notée ω_0, dont on calculera la valeur.

Pour la fin de l'exercice, l'axe (Ox) est vertical ascendant et on tient compte du poids. On ne suppose plus ici que $\varepsilon \ll 1$.

4) Déterminer une nouvelle expression de l'énergie potentielle totale du système, notée $\mathcal{E}'_p(x)$. On introduira le paramètre sans dimension $\alpha = \dfrac{U_0}{mgx_R}$.

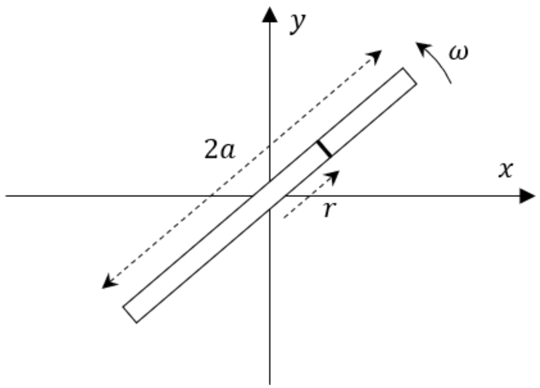
5) Justifier brièvement, en traçant son allure, que $\mathcal{E}'_p(x)$ peut présenter de nouveau un minimum local si α est supérieur à une valeur critique α_c dont on ne cherchera pas à donner la valeur. Tracer l'allure de $\mathcal{E}'_p(x)$ pour $\alpha > \alpha_c$.

6) On donne $\alpha_c = 1,54$. Calculer la valeur de U_0 correspondante (en unité de température), les autres paramètres étant inchangés et commenter.

7) Expliquer, sans mener les calculs, comment on calculerait la profondeur du piège ainsi constitué ainsi que sa position d'équilibre.

Exercice n°9 • Tube en rotation ★★½

On considère un tube cylindrique de section S et de longueur $2a$. Un piston, d'épaisseur négligeable, de masse m et pouvant coulisser le long du cylindre sépare deux compartiments, chacun contenant n moles de gaz parfait maintenu à la température T_0 constante. Le tube est mis en rotation à une vitesse angulaire ω.



On se place dans le repère tournant lié au cylindre. Dans ce référentiel, la position du piston est repérée par l'unique variable $r \in [-a; a]$ et sa vitesse vaut $\dot{r}$. On admet que l'énergie potentielle du système {gaz du compartiment de gauche + gaz du compartiment de droite + piston de masse m} vaut :

$$\mathcal{E}_p(r) = \underbrace{-nRT_0 \ln\left(1 + \frac{r}{a}\right)}_{\mathcal{E}_{p1}} \underbrace{-nRT_0 \ln\left(1 - \frac{r}{a}\right)}_{\mathcal{E}_{p2}} \underbrace{-\frac{1}{2} m\omega^2 r^2}_{\mathcal{E}_{p3}}$$

où R est la constante des gaz parfaits.

Donnée : développement limité lorsque $\varepsilon \ll 1$:

$$\ln(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^4}{4} + \dots$$

1) Déterminer l'expression des trois forces $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$ et $\overrightarrow{F}_3$ dérivant respectivement des énergies potentielles $\mathcal{E}_{p1}$, $\mathcal{E}_{p2}$ et $\mathcal{E}_{p3}$.

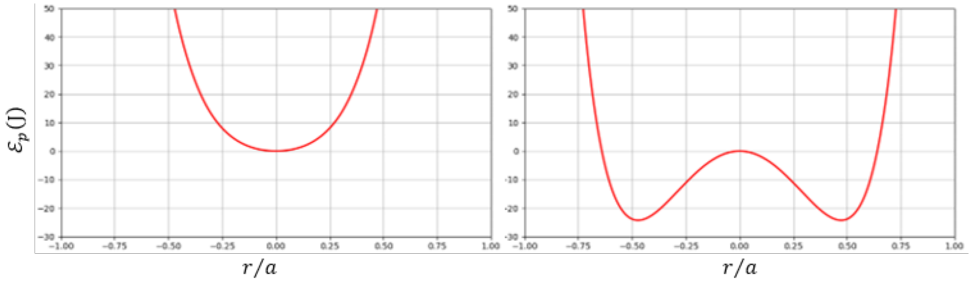
2) Montrer que $r_0 = 0$ est toujours une position d'équilibre du piston. On introduit la vitesse angulaire critique :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2nRT_0}{ma^2}}$$

3) Montrer que si $\omega > \omega_c$, il existe deux positions d'équilibre, notées r_+ et r_-, dont on déterminera l'expression.

4) Déterminer par le calcul la stabilité de la position d'équilibre en r_0.

On donne ci-dessus la forme de l'énergie potentielle pour $\omega > \omega_c$ et $\omega < \omega_c$.



5) Identifier quelle courbe correspond à quel cas. Déterminer graphique la stabilité des positions d'équilibre r_+ et r_-.

On se place dans le cas où $\omega < \omega_c$. On suppose que $r \ll a$.

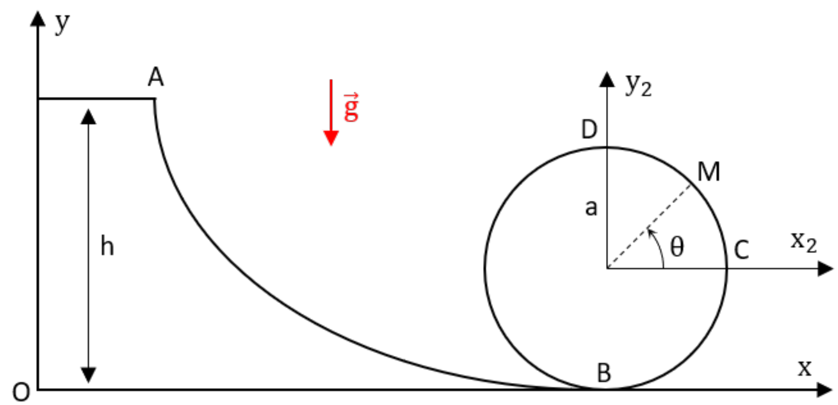
6) Faire un développement limité à l'ordre 2 en r/a de l'énergie potentielle et montrer que :

$$\mathcal{E}_p(r) \simeq \frac{1}{2} m \left(\omega_c^2 - \omega^2\right) r^2$$

7) Déterminer l'équation différentielle vérifier par r au voisinage de r_0. Montrer qu'il s'agit d'un comportement d'oscillateur harmonique et identifier la pulsation propre ω_0 des oscillations.

Exercice n°10 • Looping ★★☆

Une voiture de manège de masse $m = 24$ kg est assimilée à un point matériel. Cette voiture est posée sur deux rails parallèles et glisse sans frottement le long de la trajectoire représentée ci-dessous, constituée d'une rampe et d'un looping de rayon $a = 4,7$ m.



La voiture est abandonnée sans vitesse au point A d'altitude $h > a$. On suppose pour les deux premières questions que la hauteur h est suffisamment grande pour que la voiture reste constamment en contact avec les rails.

1) Exprimer la vitesse v_B en B de la voiture en fonction de g et h. Expliquer pourquoi le résultat ne dépend pas de la forme de la rampe.

2) À l'aide d'un théorème énergétique, établir un lien entre $\dot{\theta}^2$, θ et les constantes du problème.

3) Exprimer N, la norme de la réaction normale exercée par les rails sur la voiture en M, en fonction de θ et des constantes du problème.

4) Pour quel point M_0 du cercle la norme de $\overrightarrow{N}$ est-elle minimale ?

5) Donner l'expression littérale puis calculer la hauteur h minimale pour laquelle la voiture ne décolle pas des rails.

Exercice n°11 • Énergie potentielle linéaire ★★☆

On considère un point matériel de masse m en mouvement unidimensionnel le long d'un axe (Ox) , soumis à une force $\overrightarrow{F} = -F_0 \overrightarrow{u_x}$ si $x > 0$ et $\overrightarrow{F} = F_0 \overrightarrow{u_x}$ si $x < 0$, avec F_0 une constante positive. On néglige le poids.

1) Montrer que la force est conservative et déterminer l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ associée. Tracer $\mathcal{E}_p(x)$.

Remarque : on admet que la fonction $\mathcal{E}_p(x)$ est définie et continue en $x = 0$.

2) Existe-t-il des états de diffusion ?

À l'instant initial, la masse se trouve en $x = 0$, animé du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}_0 = v_0 \overrightarrow{u_x}$, avec v_0 est constante positive.

3) Déterminer l'amplitude x_{max} de son mouvement ultérieur en fonction des constantes du problème.

On cherche à déterminer la période du mouvement.

4) Exprimer l'expression de sa vitesse $\dot{x}$ en fonction de v_0, x et x_{max}, lorsque la masse se trouve en x tel que $0 \leqslant x \leqslant x_{max}$ et que la vitesse $\dot{x} > 0$.

5) Isoler dt puis l'intégrer pour obtenir la période T des oscillations.

Éléments de correction

❶ $W_T\left(\overrightarrow{f}\right) = -\pi\alpha x_0^2\omega$. ❷ 1) cf. correction. 2) $\mathcal{E}_{p,1}(x) = -\dfrac{1}{2}kx^2$. 3) $W_{M_1M_2}\left(\overrightarrow{F}_1\right) = \dfrac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$. 4) $\oint \overrightarrow{F}_2 \cdot d\overrightarrow{OM} \neq 0$. 5) $\mathcal{E}_{p,3}(x,y) = \dfrac{1}{2}k\left(x^2+y^2\right)$. 6) $\mathcal{E}_{p,3} = \dfrac{1}{2}kr^2$. ❸ 1) $\mathcal{E}_p(x) = mgx\,\sin(\alpha) + \dfrac{1}{2}k\left(x-\ell_0\right)^2$ si $x \leqslant \ell_0$ et $\mathcal{E}_p(x) = mgx\,\sin(\alpha)$ si $x \geqslant \ell_0$. 2) $x_{eq} = \ell_0 - \dfrac{mg\,\sin(\alpha)}{k}$. 3) et 4) cf. correction. 5) $mgL\,\sin(\alpha) = \dfrac{1}{2}m\,v_{max}^2 + g\,x_{eq}\,\sin(\alpha) + \dfrac{1}{2}k\left(x_{eq}-\ell_0\right)^2$. 6) $mgL\,\sin(\alpha) = g\,\ell_{min}\,\sin(\alpha) + \dfrac{1}{2}k\left(\ell_{min}-\ell_0\right)^2$. ❹ 1) $\mathcal{P}_m = \mu m g v_0 = 170$ kW. 2) $d = \dfrac{v_0^2}{2\mu g} = 166$ m. 3) $v_1 = \sqrt{2\mu g d} = 113$ km·h^{-1}. ❺ 1) $\overrightarrow{v} = v_0\left(1 - \dfrac{R^2}{r^2}\right)\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} - v_0\left(1+\dfrac{R^2}{r^2}\right)\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}$. 2) $\overrightarrow{v} \simeq v_0\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} - v_0\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$. 3) $\overrightarrow{v} = -2v_0\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}$. Déplacement tangent au cylindre. ❻ 1) $\mathcal{E}_p(z) = -mgz + \dfrac{1}{2}k\left(z-\ell_0\right)^2$. 2) $z_{eq} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$. 3) $\ddot{z} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_{eq}$ et $z(t) = z_0\cos(\omega_0 t) + z_{eq}$. ❼ $\ell_m = h\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2-1}\right) = 71,4$ m. ❽ 1) $v_0 < \sqrt{\dfrac{2U_0}{m}}$. 2) $v_\infty = v_0\sqrt{1 - \dfrac{2U_0}{mv_0^2}}$. 3) $\omega_0 = \dfrac{2U_0}{mx_R^2} = 2,3\cdot 10^{-3}$ rad·s^{-1}. 4) $\mathcal{E}_p(x) = mgx_R\left(\varepsilon - \dfrac{\alpha}{1+\varepsilon^2}\right)$. 6) $T_c = \dfrac{\alpha_c mgx_R}{k_B} = 3,8\cdot 10^{-6}$ µK $< T_0$. 7) Position d'équilibre : $x = x_{min}$. Profondeur du puits : $U_0' = \mathcal{E}_p'(x_{max}) - \mathcal{E}_p(x_{min})$. ❾ 1) $\overrightarrow{F}_1 = \dfrac{nRT_0}{a+r}\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{F}_2 = -\dfrac{nRT_0}{a-r}\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{F}_3 = m\omega^2 r\,\overrightarrow{u_r}$. 2) $\mathcal{E}_p'(r_0) = 0$. 3) $r_\pm = \pm\, a\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$. 4) Stable si $\omega < \omega_c$ et instable si $\omega > \omega_c$. 5) Gauche : $\omega < \omega_c$ et droite : $\omega > \omega_c$. 7) $\ddot{r} + \omega_0^2\,r = 0$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}$ ❿ 1) $v_B = \sqrt{2gh}$. 2) $gh = \dfrac{1}{2}a^2\dot{\theta}^2 + ga\left(1+\sin(\theta)\right)$. 3) $N = mg\left(\dfrac{2h}{a} - 2 - 3\sin(\theta)\right)$. 4) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. 5) $h > \dfrac{5a}{2} = 11,75$ m. ⓫ 1) $\mathcal{E}_p(x) = F_0\,|x|$. 2) Non. 3) $x_{max} = \dfrac{mv_0^2}{2F_0}$. 4) $\dot{x} = v_0\sqrt{1 - \dfrac{x}{x_{max}}}$. 5) $dt = \dfrac{dx}{v_0\sqrt{1-\dfrac{x}{x_{max}}}}$ donc : $T = \dfrac{4mv_0}{F_0}$.